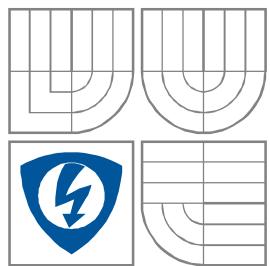


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

ANALÝZA NEURČITOSTI POZICE KOLOVÉHO ROBOTA

ANALYSIS OF ROBOT POSITION ERRORS

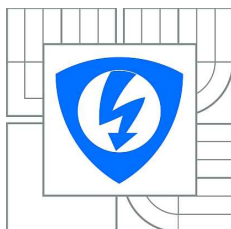
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JAKUB NĚMEC

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

prof. Ing. FRANTIŠEK ŠOLC, CSc.



VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

Ústav automatizace a měřicí techniky

Bakalářská práce

bakalářský studijní obor
Automatizační a měřicí technika

Student: Jakub Němec

Ročník: 3

ID: 125561

Akademický rok: 2011/12

NÁZEV TÉMATU:

Analýza neurčitosti pozice kolového robota.

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Proveďte analýzu neurčitosti pohybu kolového diferenciálně řízeného robota pomocí metod popsanych v doporučené literatuře. Výkony a výsledky jednotlivých metod porovnejte na vhodně zvolených trajektoriích

DOPORUČENÁ LITERATURA:

Siegwart R., Nourbakhsh I. "Introduction to Autonomous Mobile Robots", MIT Press, 2004

Thrun S., Burgard W., Fox D. "Probabilistic Robotics", MIT Press, 2005

Termín zadání: 6.2.2012

Termín odevzdání: 28.5.2012

Vedoucí práce: prof. Ing. František Šolc, CSc.

Konzultanti bakalářské práce:

doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.

předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá porovnáním několika metod výpočtu neurčitosti pozice kolových robotů. První část popisuje jednotlivé metody výpočtu. Další části jsou věnovány jednotlivým popsaným metodám a faktorům, které ovlivňují vznik a velikost neurčitostí.

Klíčová slova

Neurčitost pozice, robot, kovarianční matice, pravděpodobnostní mapa

Abstract

This bachelor's thesis deals with the comparison of several robot position error computation methods. The first part describes individual computation methods. The next parts are dedicated to the individual described methods and factors that influence the formation and size of position errors.

Keywords

Position error, robot, covariance matrix, probability map

Bibliografická citace:

NĚMEC, J. *Analýza neurčitosti pozice kolového robota*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2012. 37s. Vedoucí bakalářské práce byl prof. Ing. František Šolc, CSc.

Prohlášení

„Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma Analýza neurčitosti pozice kolového robota jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

V Brně dne: **22. května 2012**

.....

podpis autora

Poděkování (nepovinné)

Děkuji vedoucímu bakalářské práce prof. Ing. Františku Šolcovi, CSc. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé diplomové práce.

V Brně dne: **22. května 2012**

.....
podpis autora

Obsah

1	Úvod	8
2	Matematický aparát	9
2.1	Metoda výpočtu kovariančních matic	10
2.1.1	Vizualizace neurčitosti	11
2.1.2	Částicový filtr.....	12
2.2	Metoda pravděpodobnostních map	13
2.2.1	Rychlostní vyjádření pohybu	13
2.2.2	Odometrické vyjádření pohybu	15
2.2.3	Složitost simulace.....	16
3	Analýza metodou výpočtu kovariančních matic	18
3.1	Vliv tvaru trajektorie	18
3.2	Vliv časového průběhu rychlosti.....	22
3.3	Vliv parametrů modelu robota	26
3.4	Rozložení neurčitosti.....	29
4	Analýza metodou pravděpodobnostních map	31
4.1	Rychlostní vyjádření pohybu	31
4.1.1	Vliv trajektorie	31
4.1.2	Vliv ujeté dráhy	32
4.1.3	Vliv rychlosti.....	33
4.1.4	Vliv chybových konstant.....	33
4.2	Odometrické vyjádření pohybu	34
4.2.1	Vliv trajektorie	34
4.2.2	Vliv ujeté dráhy	35
4.2.3	Vliv rychlosti.....	35
4.2.4	Vliv chybových konstant.....	36
5	Závěr.....	37

1 ÚVOD

Jedním z nejdůležitějších odvětví robotiky je sebelokalizace, která je důležitá pro to, aby se robot dokázal pohybovat v daném terénu, ať už známém nebo neznámém. Řešení této problematiky existuje několik, například lokalizace pomocí externích systémů (GPS), nebo snímání okolí.

Nejčastěji používaným řešením, ať už samotným, či v kombinaci s jinými, je odometrie – výpočet pozice robota z jeho pohybu. Jedním z hlavních problémů tohoto přístupu je fakt, že senzory, které snímají pohyb robota, jsou zatíženy chybami, tudíž dochází k vzniku nepřesností.

Tato práce se zaměřuje na metody, pomocí nichž je možné tyto nepřesnosti zjistit a počítat s nimi.

2 MATEMATICKÝ APARÁT

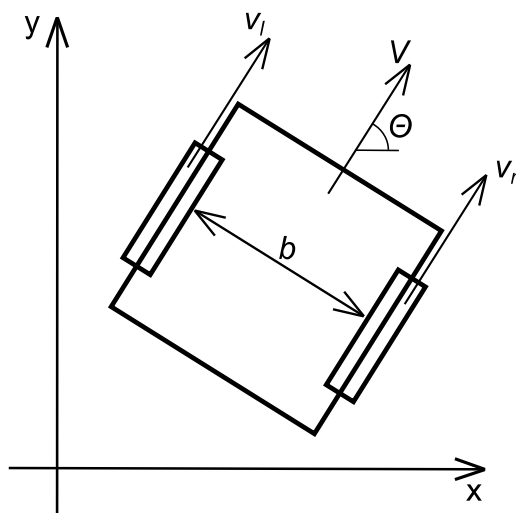
V následujícím textu se omezíme pouze na pohyb dvoukolového robota s diferenciálním řízením ve dvojdimenzionálním prostoru. Ten je popsán rychlostmi obou kol v čase ($v_l(t)$, $v_r(t)$). Tyto rychlosti mohou být přepočítány na rychlost pohybu $V(t)$ a rychlost změny natočení $\omega(t)$:

$$V = \frac{v_r + v_l}{2}, \omega = \frac{v_r - v_l}{b} \quad (1)$$

,kde b je vzdálenost kol robota.

Pohyb robota vyjadřuje změnu jeho polohy, která je vyjádřena souřadnicemi x , y a úhlem natočení θ [rad].

$$\dot{x} = V \cdot \cos \theta, \dot{y} = V \cdot \sin \theta, \dot{\theta} = \omega \quad (2)$$



Obr. 1 Model robota

Tento přístup však vede k řešení integrálů, které je za použití výpočetní techniky vysoce časově náročné, proto se při výpočtu neurčitostí používají různé iterační výpočetní metody, při kterých se v každém kroku předpokládají konstantní rychlosti obou kol.

Neurčitost pozice vzniká v důsledku náhodných chyb měření rychlostí, které proto pokládáme za náhodné veličiny se střední hodnotou rovnou změřené hodnotě a předem známým rozptylem. V dalším textu se zaměříme na dvě metody výpočtu neurčitosti: metodu výpočtu kovariančních matic [1] a metodu pravděpodobnostních map [2].

2.1 Metoda výpočtu kovariančních matic

Tato metoda pro výpočet změny pozice robota používá variantu Eulerovy obdélníkové výpočetní metody: místo rychlostí počítá s ujetou vzdáleností obou kol Δs_l , Δs_r v každém kroku. Změna pozice se pak vypočítá [1]:

$$\Delta x = \Delta s \cdot \cos\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right), \Delta y = \Delta s \cdot \sin\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right), \Delta\theta = \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{b}, \Delta s = \frac{\Delta s_r + \Delta s_l}{2} \quad (3)$$

,kde Δx a Δy jsou změny polohy robota v souřadnicích x a y, $\Delta\theta$ je změna natočení robota a Δs je robotem ujetá vzdálenost v jednom kroku simulace. Funkce pro výpočet polohy v dalším kroku simulace p' je tedy:

$$p' = f(x, y, \theta, \Delta s_r, \Delta s_l) = \begin{bmatrix} x + \frac{\Delta s_r + \Delta s_l}{2} \cdot \cos\left(\theta + \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{2b}\right) \\ y + \frac{\Delta s_r + \Delta s_l}{2} \cdot \sin\left(\theta + \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{2b}\right) \\ \theta + \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{b} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Samotná neurčitost pozice je dána kovarianční maticí polohy Σ_p :

$$\Sigma_p = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{yx} & \sigma_{\theta x} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{\theta y} \\ \sigma_{x\theta} & \sigma_{y\theta} & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

kteřá je na začátku pohybu známa (nejlépe nulová), a v každém dalším kroku je vypočítána takto:

$$\Sigma_p' = \mathbf{J}_p \cdot \Sigma_p \cdot \mathbf{J}_p^T + \mathbf{J}_\Delta \cdot \Sigma_\Delta \cdot \mathbf{J}_\Delta^T \quad (6)$$

,kde Σ_p je kovarianční matice polohy v současném kroku, Σ_p' je kovarianční matice polohy v příštím kroku, Σ_Δ je kovarianční matice pohybu, \mathbf{J}_p je jakobián polohy a \mathbf{J}_Δ je jakobián pohybu.

Kovarianční matice pohybu je dána chybovými konstantami kol k_r , k_l , které jsou předem známy:

$$\Sigma_\Delta = \begin{bmatrix} k_r |\Delta s_r| & 0 \\ 0 & k_l |\Delta s_l| \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ve vzorci (7) se dopouštíme dvou předpokladů – chyby pohybu obou kol jsou na sobě nezávislé, a rozptyl těchto chyb je přímo úměrný absolutní hodnotě ujetých vzdáleností příslušných kol.

Jakobiány vypočítáme z funkce pro výpočet polohy v příštím kroku simulace (4):

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p'}{\partial x}; \frac{\partial p'}{\partial y}; \frac{\partial p'}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta s \cdot \sin\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) \\ 0 & 1 & \Delta s \cdot \cos\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) - \frac{\Delta s}{2b} \sin\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) & \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) + \frac{\Delta s}{2b} \sin\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \sin\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) - \frac{\Delta s}{2b} \cos\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) & \frac{1}{2} \sin\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) + \frac{\Delta s}{2b} \cos\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) \\ \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \end{bmatrix} \quad (9)$$

2.1.1 Vizualizace neurčitosti

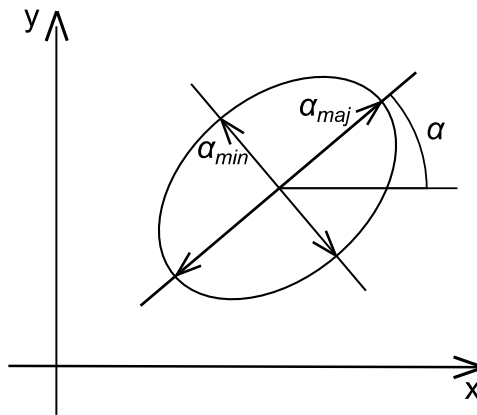
Výsledná kovarianční matice polohy robota se dá zobrazit jako elipsa se středem v pozici, jíž by robot dosáhl, kdyby jeho pohyb nebyl zatížen chybami. Tvar této elipsy se dá vypočítat několika metodami. První metodou je výpočet parametrů elipsy, uvedený v [3], přesněji řečeno délky hlavní α_{maj} a vedlejší α_{min} osy elipsy a úhlu α , který svírá hlavní osa elipsy s osou x souřadné soustavy:

$$\alpha = 0.5 \cdot \text{atan2}(2\sigma_{xy}, \sigma_x^2 - \sigma_y^2) \quad (10)$$

$$\alpha_{maj} = \sqrt{\frac{k}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \tau)}, \alpha_{min} = \sqrt{\frac{k}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \tau)} \quad (11)$$

$$\tau = \sqrt{(\sigma_x^2)^2 + (\sigma_y^2)^2 - 2\sigma_x^2\sigma_y^2 + 4\sigma_{xy}^2}, k = -2\ln(1 - Pr) \quad (12)$$

,kde Pr je pravděpodobnost pádu dvojice $[x,y]$ do elipsy.



Obr. 2 Vizualizace neurčitosti metodou výpočtu parametrů elipsy

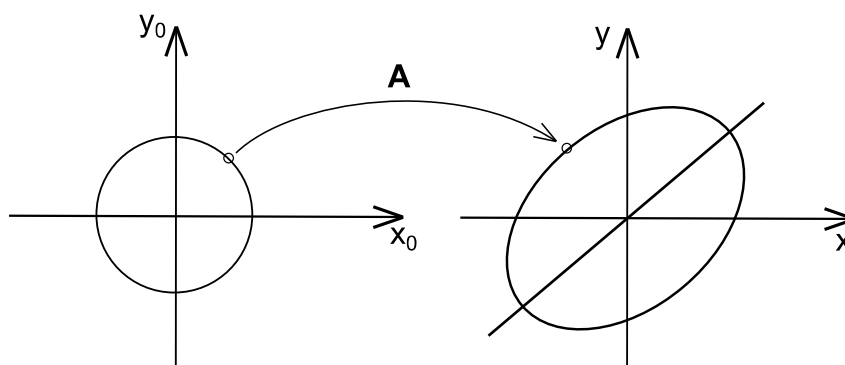
Druhou metodou je transformace normovaného normálního rozložení jednotkové kružnice, která využívá vlastností normálního rozložení náhodné veličiny, tj. možnosti transformace náhodné veličiny vygenerované jedním rozložením na ekvivalentní veličinu vygenerovanou rozložením druhým. Metoda vychází z obrazce, který odpovídá jednotkové kovarianční matici, což je kružnice o poloměru r pro pravděpodobnost umístění náhodného bodu uvnitř obrazce $r\sigma$, tj. pro $r = 3$ je tato pravděpodobnost 98,9% [4]. Výpočet výsledné elipsy spočívá v přepočtu souřadnic bodů okraje původního obrazce pomocí vzorce:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \times \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

,kde $[x, y]$ jsou souřadnice bodu výsledné elipsy, $[x_0, y_0]$ jsou souřadnice bodu výchozí kružnice a \mathbf{A} je matice přepočtu souřadnic, pro kterou platí:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Matici \mathbf{A} získáme Choleského dekompozicí prvních dvou řádků a sloupců matice Σ_p .



Obr. 3 Vizualizace neurčitosti metodou transformace normovaného normálního rozložení jednotkové kružnice

2.1.2 Částicový filtr

Výpočet polohy robota metody kovariančních matic lze jednoduše upravit pro výpočet částicovým filtrem: Pokud za rychlosti obou kol robota dosadíme náhodné veličiny s normálním rozdělením, se středními hodnotami Δs_r , Δs_l a rozptyly $\sqrt{k_r \cdot |\Delta s_r|}$, $\sqrt{k_l \cdot |\Delta s_l|}$, můžeme pak dosazením těchto rychlostí do funkce pro polohu robota v dalším kroku simulovat zašuměný pohyb robota.

2.2 Metoda pravděpodobnostních map

Tato metoda spočívá v sestavování map stavového prostoru, které vyjadřují, s jakou pravděpodobností se robot může vyskytovat v daném stavu. Pro sestavení těchto map využívá algoritmus, který vypočítá pravděpodobnost, se kterou se robot po vyjetí z pozice $\mathbf{x}_{t-1} = [x, y, \theta]$ pohybem \mathbf{u}_t dostane po čase Δt do pozice $\mathbf{x}_t = [x', y', \theta']$. Pohyb \mathbf{u}_t může být vyjádřen buď rychlostně jako rychlost pohybu V a rychlost změny úhlu natočení ω nebo odometricky jako změřenou polohu robota na začátku a na konci pohybu. Z tohoto důvodu se při sestavování map dopouštíme diskretizace stavového prostoru.

2.2.1 Rychlostní vyjádření pohybu

V rychlostním vyjádření je pohyb zadán ve tvaru $\mathbf{u}_t = [V, \omega]$, kde V je rychlost pohybu robota a ω je rychlost změny natočení robota. Rychlostní popis převádí problém výpočtu integrálu na výpočet pohybu po kružnici o poloměru $r = V/\omega$; pohyb po přímce, který nastává v případě $\omega = 0$, považuje za pohyb po kružnici o nekonečném poloměru, při algoritmizaci je tedy potřeba tento případ ošetřit.

Pro výpočet pravděpodobnosti pohybu z počátečního bodu do koncového je nejdříve potřeba zjistit střed $[x^*, y^*]$ a poloměr r^* kružnice, po které se robot pohybuje:

$$x^* = \frac{x + x'}{2} + \mu(y - y'), y^* = \frac{y + y'}{2} + \mu(x' - x), r^* = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} \quad (15)$$

,kde μ je:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{(x - x')\cos\theta + (y - y')\sin\theta}{(y - y')\sin\theta - (x - x')\cos\theta} \quad (16)$$

V případě pohybu po přímce je jmenovatel zlomku ve vzorci (16) roven nule. Parametry potřebného pohybu pro přemístění mezi zadanými pozicemi \mathbf{x}_{t-1} a \mathbf{x}_t se vypočítají:

$$\omega^* = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, V^* = \omega^* \cdot r^*, \gamma^* = \frac{\theta' - \theta}{\Delta t} - \omega^* \quad (17)$$

,kde V^* je potřebná rychlost, ω^* je potřebná rychlost změny natočení, γ^* je potřebný drift natočení, Δt je čas, po který je pohyb prováděn a $\Delta\theta$ je úhel, který robot tímto pohybem po kružnici urazí:

$$\Delta\theta = \text{atan2}(y' - y^*, x' - x^*) - \text{atan2}(y - y^*, x - x^*) \quad (18)$$

Potřeba počítat drift natočení γ^* vychází ze zjednodušující představy, které se při použití této metody dopouštíme, totiž že veškerý pohyb robota je prováděn pouze na kruhové trajektorii. Bez driftu by po dokončení pohybu mohl robot v jakémkoliv bodě prostoru být natočen pouze v jednom určitém směru.

Výsledná pravděpodobnost zadaného pohybu p se vypočítá:

$$p = \text{prob}(v - v^*, \alpha_1 V^2 + \alpha_2 \omega^2) \cdot \text{prob}(\omega - \omega^*, \alpha_3 V^2 + \alpha_4 \omega^2) \cdot \text{prob}(\gamma^*, \alpha_5 V^2 + \alpha_6 \omega^2) \quad (19)$$

,kde parametry α_1 až α_6 jsou chybové konstanty modelu robota. Funkce $\text{prob}(a, b^2)$ vrací hodnotu distribuční funkce zvolené pravděpodobnosti o nulové střední hodnotě a rozptylu b^2 v bodě a . Výpočet této funkce je pro normální rozložení:

$$\text{prob}(a, b^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} e^{-\frac{a^2}{2b^2}} \quad (20)$$

,a pro trojúhelníkové rozložení:

$$\text{prob}(a, b^2) = \max\left(0, \frac{1}{\sqrt{6}b} - \frac{|a|}{6b^2}\right) \quad (21)$$

Výsledná pravděpodobnost p cílového stavu není absolutní, ale relativní vůči pravděpodobnostem všech ostatních stavů ve stavovém prostoru.

2.2.1.1 Částicový filtr

Pro simulaci zašuměného pohybu pomocí rychlostního vyjádření pohybu je v [2] popsán algoritmus, který využívá funkci **sample(b^2)** pro vygenerování náhodného čísla s normálním rozložením:

$$\text{sample}(b^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \text{rand}(-b, b) \quad (22)$$

,a s trojúhelníkovým rozložením:

$$\text{sample}(b^2) = \frac{\sqrt{6}}{2} [\text{rand}(-b, b) + \text{rand}(-b, b)] \quad (23)$$

,kde **rand(a, b)** je funkce pro vygenerování náhodného čísla s uniformním rozložením mezi čísly a a b .

Samotný algoritmus ze vstupních hodnot $\mathbf{x}_{t-1} = [x, y, \theta]$ a $\mathbf{u}_t = [V, \omega]$ vygeneruje náhodný pohyb V', ω', γ' :

$$V' = V + \text{sample}(\alpha_1 V^2 + \alpha_2 \omega^2) \quad (24)$$

$$\omega' = \omega + \text{sample}(\alpha_3 V^2 + \alpha_4 \omega^2) \quad (25)$$

$$\gamma' = \text{sample}(\alpha_5 V^2 + \alpha_6 \omega^2) \quad (26)$$

,kde α_1 až α_6 jsou stejné chybové konstanty jako v (19). Výstupní hodnotu $\mathbf{x}_t = [x', y', \theta']$ pak spočítáme jako:

$$x' = x - \frac{V'}{\omega'} \sin \theta + \frac{V'}{\omega'} \sin(\theta + \omega' \Delta t) \quad (27)$$

$$y' = y + \frac{V'}{\omega'} \cos \theta - \frac{V'}{\omega'} \cos(\theta + \omega' \Delta t) \quad (28)$$

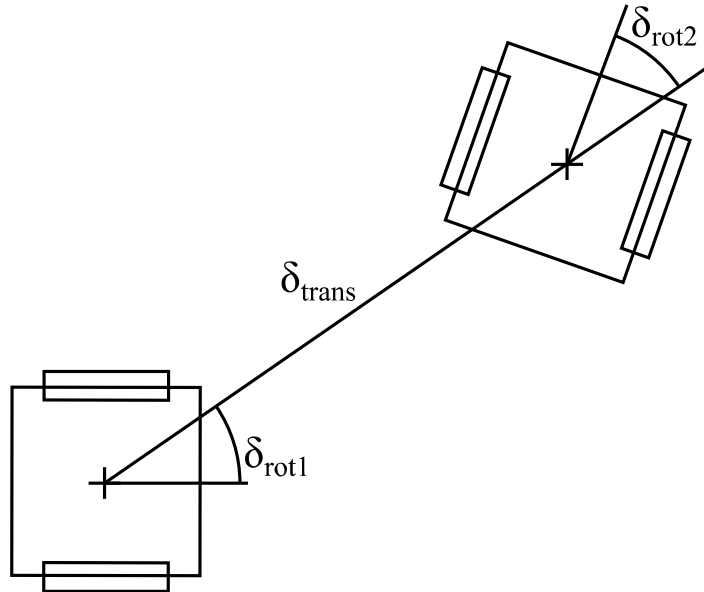
$$\theta' = \theta + \omega' \Delta t + \gamma' \Delta t \quad (29)$$

V případě, že výsledná hodnota ω' je nulová, dochází v (27) a (28) k dělení nulou, což odpovídá interpretaci přímého pohybu jako pohybu po kružnici s nekonečným poloměrem. Při implementaci algoritmu je tedy potřeba tuto možnost ošetřit.

2.2.2 Odometrické vyjádření pohybu

V odometrickém vyjádření je pohyb robota zadán ve tvaru $\mathbf{u}_t = [x_o, y_o, \theta_o, x'_o, y'_o, \theta'_o]$, kde $[x_o, y_o, \theta_o]$ je pozice robota změřená na začátku pohybu a $[x'_o, y'_o, \theta'_o]$ je pozice změřená na konci pohybu.

Tento popis převádí veškerý pohyb v jednom kroku na tři základní pohyby: počáteční natočení o úhel δ_{rot1} , jízdu po přímce z počátečního do koncového bodu δ_{trans} a následné natočení do konečného stavu o úhel δ_{rot2} .



Obr. 4 Interpretace pohybu v odometrickém vyjádření

Pro výpočet pravděpodobnosti zadaného koncového stavu p jsou tyto tři pohyby vypočítány pro zadanou počáteční pozici \mathbf{x}_{t-1} a koncovou pozici \mathbf{x}_t a pro pozice zadané v \mathbf{u}_t : a poté porovnány pomocí funkce $\mathbf{prob}(\mathbf{a}, \mathbf{b}^2)$, popsané v (20), (21):

$$\delta_{rot1,o} = \text{atan2}(y'_o - y_o, x'_o - x_o) - \theta_o \quad (30)$$

$$\delta_{trans,o} = \sqrt{(x_o - x'_o)^2 + (y_o - y'_o)^2} \quad (31)$$

$$\delta_{rot2,o} = \theta'_o - \theta_o - \delta_{rot1,o} \quad (32)$$

$$\delta_{rot1} = \text{atan2}(y' - y, x' - x) - \theta \quad (33)$$

$$\delta_{trans} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (34)$$

$$\delta_{rot2} = \theta' - \theta - \delta_{rot1} \quad (35)$$

$$p_1 = \text{prob}(\delta_{rot1,o} - \delta_{rot1}, \alpha_1 \delta_{rot1}^2 + \alpha_2 \delta_{trans}^2) \quad (36)$$

$$p_2 = \text{prob}(\delta_{trans,o} - \delta_{trans}, \alpha_3 \delta_{trans}^2 + \alpha_4 \delta_{rot1}^2 + \alpha_4 \delta_{rot2}^2) \quad (37)$$

$$p_3 = \text{prob}(\delta_{rot2,o} - \delta_{rot2}, \alpha_1 \delta_{rot2}^2 + \alpha_2 \delta_{trans}^2) \quad (38)$$

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \quad (39)$$

2.2.2.1 Částicový filtr

Algoritmus pro simulaci zašuměného pohybu v odometrickém vyjádření rovněž využívá funkci **sample(b²)**, popsanou v (22), (23). Algoritmus nejdříve přepočítá změřené pozice v **u_t** na pohyb:

$$\delta_{rot1} = \text{atan2}(y'_o - y_o, x'_o - x_o) - \theta_o \quad (40)$$

$$\delta_{trans} = \sqrt{(x_o - x'_o)^2 + (y_o - y'_o)^2} \quad (41)$$

$$\delta_{rot2} = \theta'_o - \theta_o - \delta_{rot1,o} \quad (42)$$

,poté vygeneruje zašuměné hodnoty pohybu:

$$\delta'_{rot1} = \delta_{rot1} - \text{sample}(\alpha_1 \delta_{rot1}^2 + \alpha_2 \delta_{trans}^2) \quad (43)$$

$$\delta'_{trans} = \delta_{trans} - \text{sample}(\alpha_3 \delta_{trans}^2 + \alpha_4 \delta_{rot1}^2 + \alpha_4 \delta_{rot2}^2) \quad (44)$$

$$\delta'_{rot2} = \delta_{rot2} - \text{sample}(\alpha_1 \delta_{rot2}^2 + \alpha_2 \delta_{trans}^2) \quad (45)$$

,a z těchto hodnot a z počáteční pozice **x_{t-1} = [x, y, θ]** vypočítá koncovou pozici **x_t = [x', y', θ']**:

$$x' = x + \delta'_{trans} \cos(\theta + \delta'_{rot1}) \quad (46)$$

$$y' = y + \delta'_{trans} \sin(\theta + \delta'_{rot1}) \quad (47)$$

$$\theta' = \theta + \delta'_{rot1} + \delta'_{rot2} \quad (48)$$

2.2.3 Složitost simulace

Velkým problémem výpočtů pravděpodobnostních map, ať už s použitím rychlostního či odometrického vyjádření pohybu, je vysoká složitost řešení algoritmu – pro každý bod počátečního stavového prostoru je v každém kroku simulace potřeba vypočítat pravděpodobnost každého bodu v konečném stavovém prostoru. To znamená, že složitost základního algoritmu pro výpočet pravděpodobnostní mapy je n^6 , kde n je

rozměr stavového prostoru, přičemž rozměry stavového prostoru ovlivňuje jak velikost obsáhlého prostoru, tak velikost vzorkování jeho diskretizace.

Existuje několik způsobů, jak tuto složitost snížit. První je možnost translace pravděpodobnostní mapy v prostoru konstantního počátečního úhlu natočení, to znamená, že například pro stejný pohyb je pravděpodobnost pohybu z pozice $[0, 0, 0]$ do pozice $[1, 1, 1]$ a z pozice $[1, 1, 0]$ do pozice $[2, 2, 1]$ stejná. Tím odpadá nutnost zabývat se počátečními souřadnicemi x, y a složitost algoritmu se sníží na n^4 . Další zefektivnění algoritmu je možné pomocí varianty semínkového vyplňování, které se běžně používá v počítačové grafice – algoritmus začne pravděpodobnostní mapu sestavovat od správně zvoleného středu a postupuje k okrajům tak dlouho, dokud nenarazí na zanedbatelně malé hodnoty pravděpodobností stavů.

Pro potřeby analýzy lze počítat jednokrokové simulace se známým počátečním stavem. Protože počítáme jen s jednou počáteční pozicí, stačí nám spočítat pravděpodobnosti v konečném stavovém prostoru jen jednou, proto je složitost tohoto výpočtu n^3 .

3 ANALÝZA METODOU VÝPOČTU KOVARIANČNÍCH MATIC

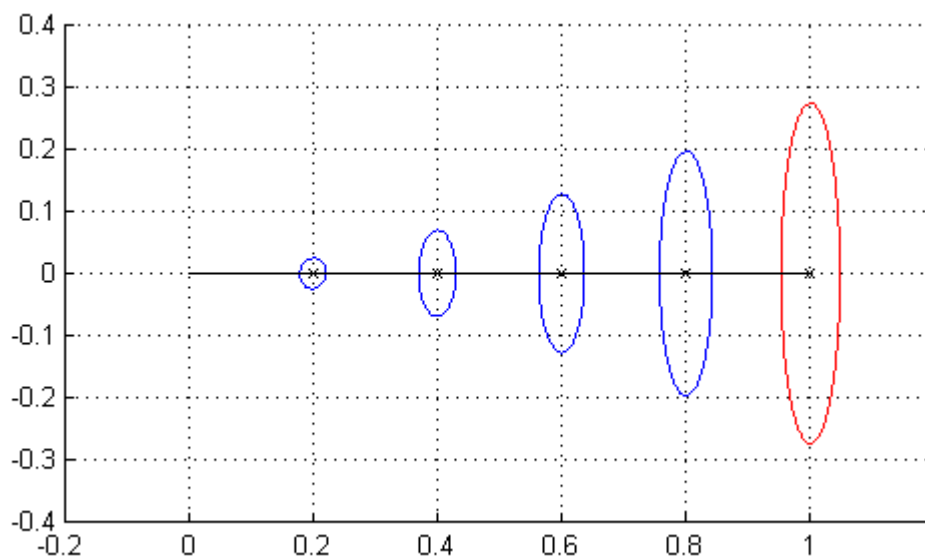
V této kapitole zjistíme vliv několika faktorů na neurčitost pozice robota dle simulace pomocí metody výpočtu kovariančních matic. Těmito faktory jsou tvar trajektorie pohybu robota, závislost rychlosti pohybu na čase a parametry modelu robota, tj. velikost chybových konstant k_l , k_r a rozchod kol b .

Obrázky použité v této kapitole zobrazují trajektorii simulovaného pohybu černou čarou a neurčitosti v určitých bodech pohybu (černé křížky) v pravidelných intervalech modrými elipsami, neurčitost na konci pohybu pak červenou elipsou, pro pravděpodobnost 98,89%.

3.1 Vliv tvaru trajektorie

Všechny simulace v této podkapitole byly provedeny se stejnými chybovými konstantami k_l , $k_r = 5 \cdot 10^{-4}$ a s konstantní rychlostí. Použitý model robota má rozchod kol $b = 0,2$ m.

Nejzákladnějším pohybem je pohyb po přímce, jenž je popsán rychlostmi $V \neq 0$, $\omega = 0$, $v_l = v_r$.

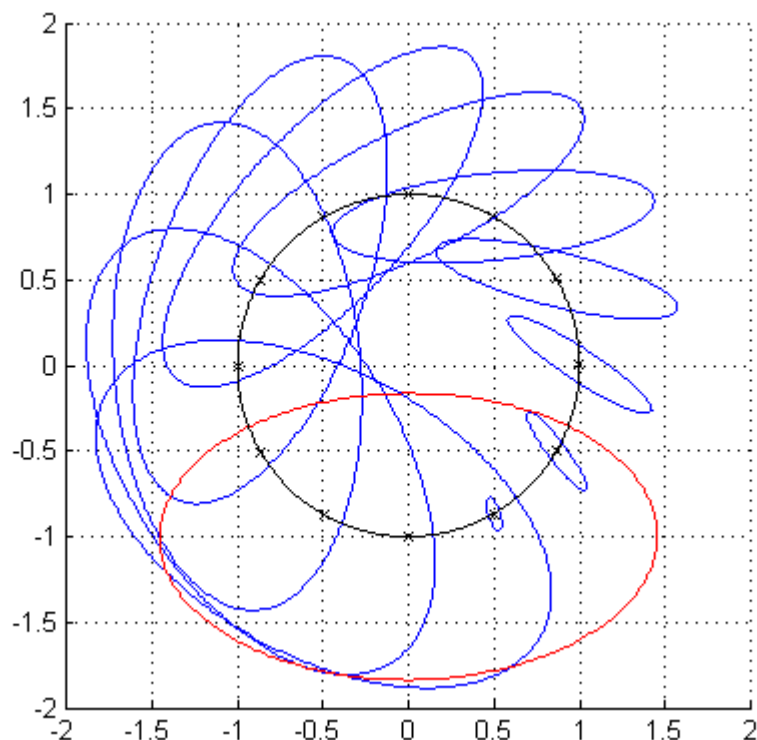


Obr. 5 Simulace pohybu po přímce o délce 1m

Z obrázku 5 je patrné, že zašuměný pohyb má mnohem větší vliv na neurčitost polohy ve směru kolmém na směr pohybu než na neurčitost ve směru pohybu. Příčinou tohoto jevu je integrace neurčitosti úhlu natočení v průběhu pohybu. To znamená, že

neurčitost celkové vzdálenosti, kterou robot urazí, stoupá s časem lineárně, zatímco neurčitost konečného úhlu natočení stoupá exponenciálně.

Vliv změny směru pohybu nejlépe ilustruje simulace pohybu po kružnici, který je definován rychlostmi $V = r\omega$, kde r je poloměr kružnice, kterou robot svým pohybem opisuje.

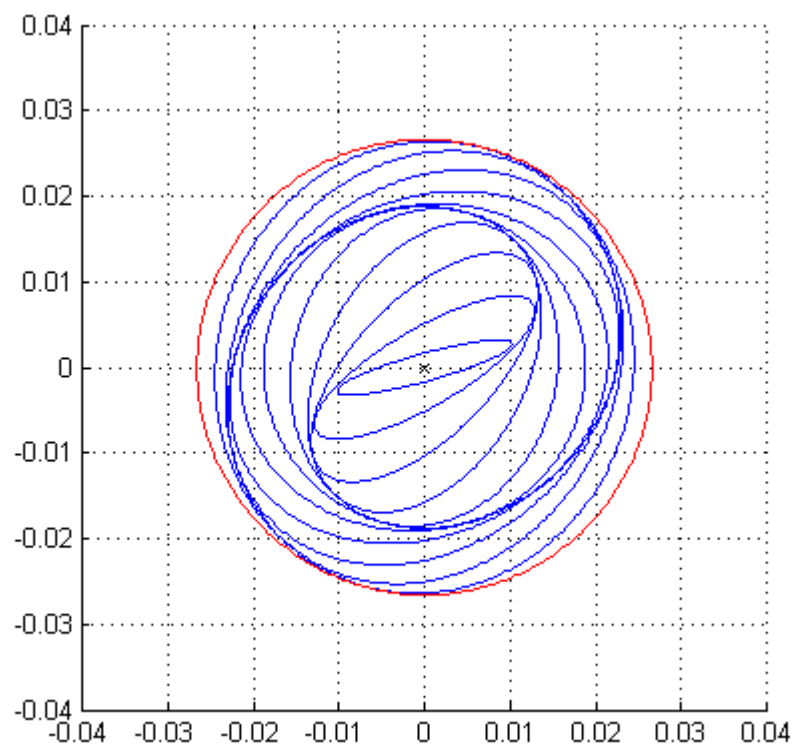


Obr. 6 Simulace pohybu po kružnici o poloměru 1m

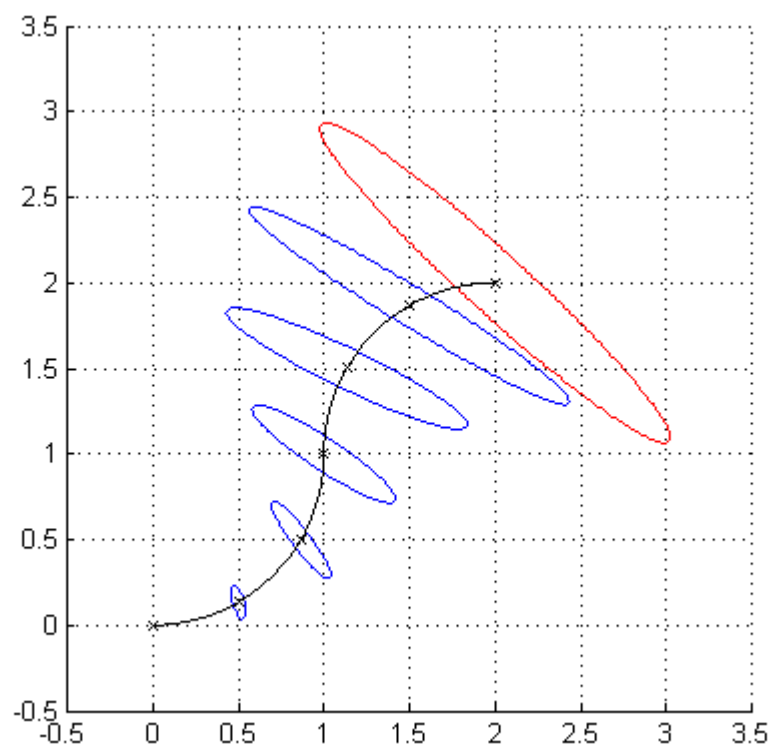
Protože robot v průběhu simulace mění směr pohybu, mění tím i směry, ve kterých se neurčitost rozšiřuje méně a více.

Posledním základním pohybem je otočení na místě, pro které jsou charakteristické rychlosti $V = 0$, $\omega \neq 0$, $v_l = -v_r$. Ačkoliv velikost neurčitosti pozice robota je závislá na ujeté vzdálenosti a při otočení na místě je tato ujetá vzdálenost zjevně nulová, je potřeba mít na paměti, že kola robota, tj. zdroj neurčitostí, i tak vykonávají pohyb, tudíž dochází ke vzniku neurčitosti.

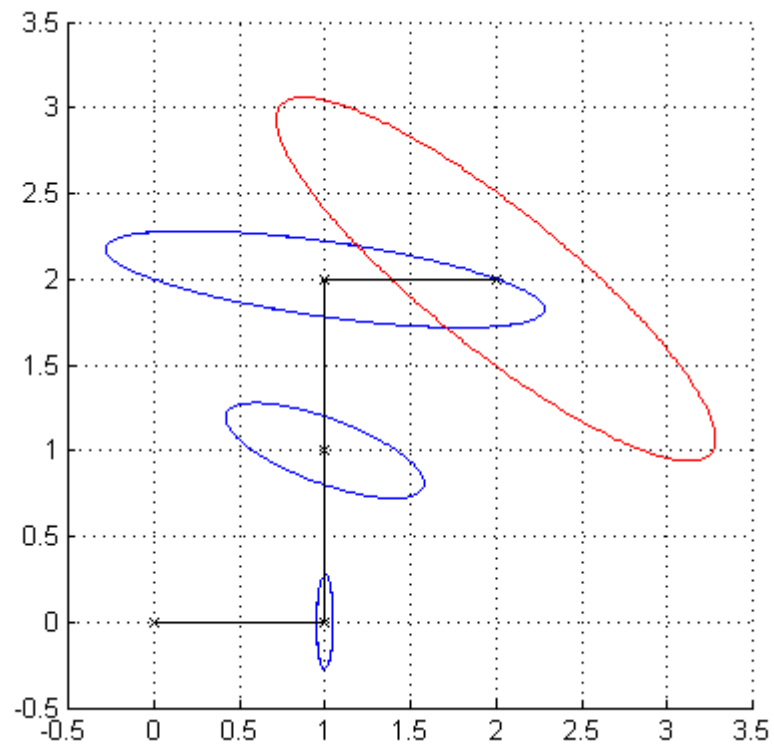
Vzhledem k předpokladu, že v jednom kroku simulace musí být rychlost obou kol robota konstantní (předpoklad, který odpovídá skutečnosti, že v jednom programovém cyklu skutečného robota obvykle tyto rychlosti neměníme), musí zákonitě každý složitější pohyb být složen z těchto tří základních pohybů. Nyní provedeme simulaci tří základních způsobů, jak se může robot dopravit z pozice $[0, 0, 0^\circ]$ do pozice $[2, 2, 0^\circ]$: opsání dvou čtvrtkružnic ve tvaru písmena S, pravoúhlý pohyb pouze pomocí přímého pohybu a natočení o 90° , a přímý pohyb z počátečního do koncového bodu.



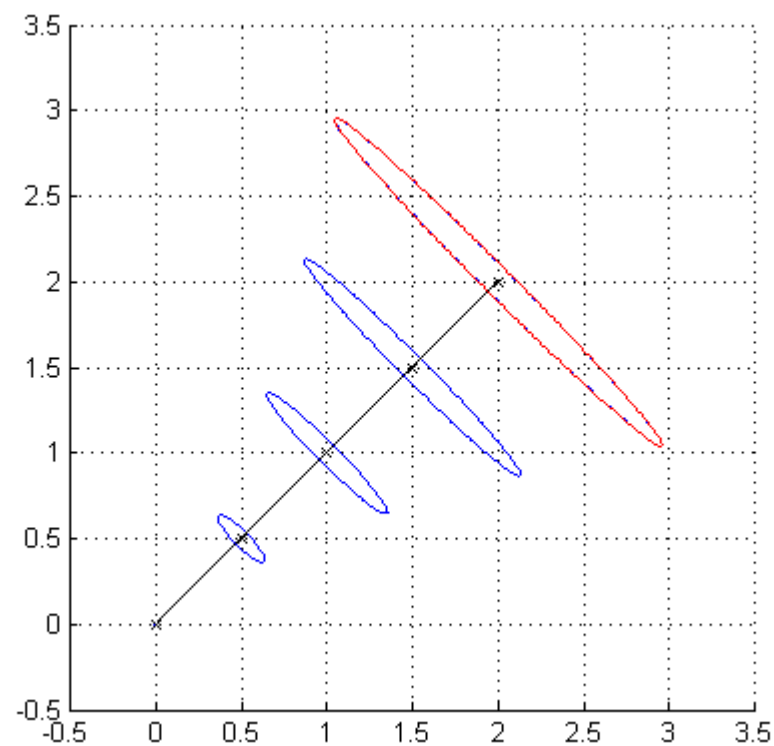
Obr. 7 Simulace otočení na místě o 360°



Obr. 8 Simulace pohybu po čtvrtkružnicích



Obr. 9 Simulace pohybu pravoúhlého pohybu



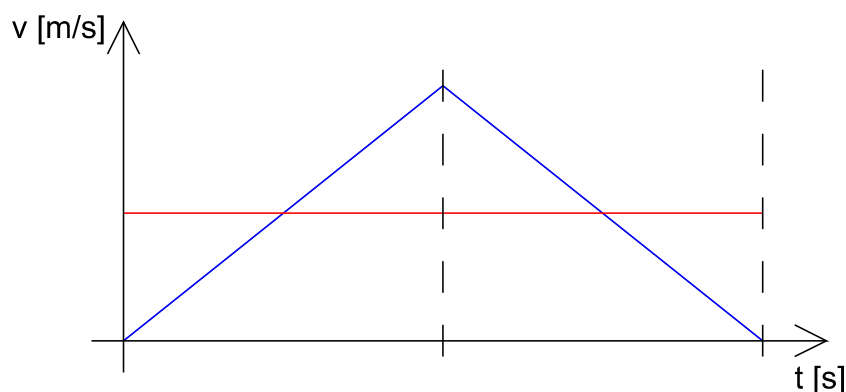
Obr. 10 Simulace přímého pohybu

K nejmenší neurčitosti dochází při přímém pohybu ze dvou důvodů – jedná se o nejkratší možnou trajektorii a dochází zde k jízdě po přímce pouze v jednom směru. Ze

zbylých dvou trajektorií, jízda po čtvrtkružnicích způsobí menší neurčitost než pravoúhlý pohyb – dráha ujetá po čtvrtkružnicích je kratší a při pravoúhlém pohybu vykonává robot veškerý pohyb pouze ve dvou na sebe kolmých směrech, což více přispívá k rozpínání neurčitosti do obou stran, než když při pohybu po čtvrtkružnicích plynule přechází mezi oběma směry.

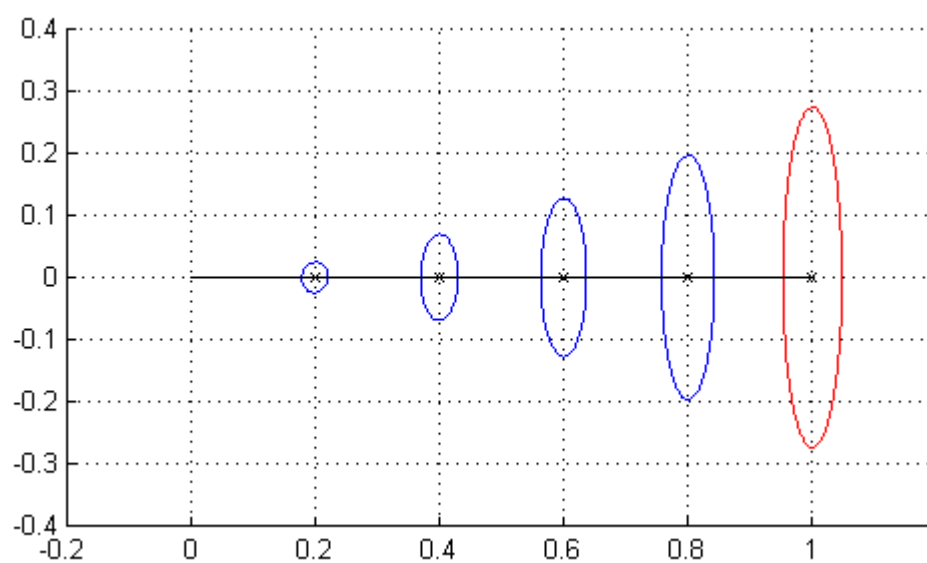
3.2 Vliv časového průběhu rychlosti

V této podkapitole porovnáme simulace pohybu robota po třech základních trajektoriích konstantní rychlostí a lineárně se měnící rychlostí s konstantním zrychlením v první polovině trajektorie a konstantním zpomalením v druhé polovině trajektorie (viz obr. 9). Parametry modelu robota jsou stejné jako v předchozí podkapitole.

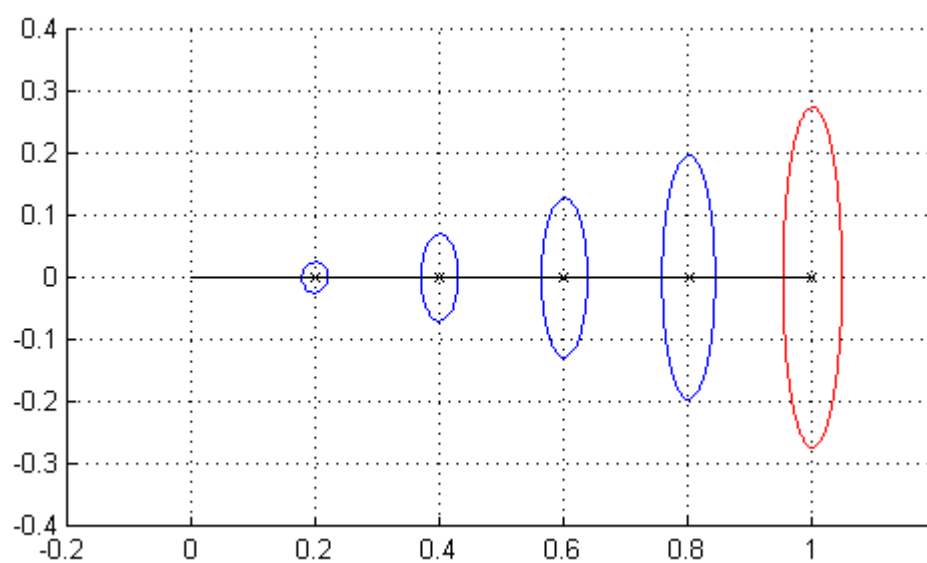


Obr. 11 Průběh rychlostí pohybu robota (červená čára – konstantní rychlost, modrá čára – lineárně se měnící rychlost)

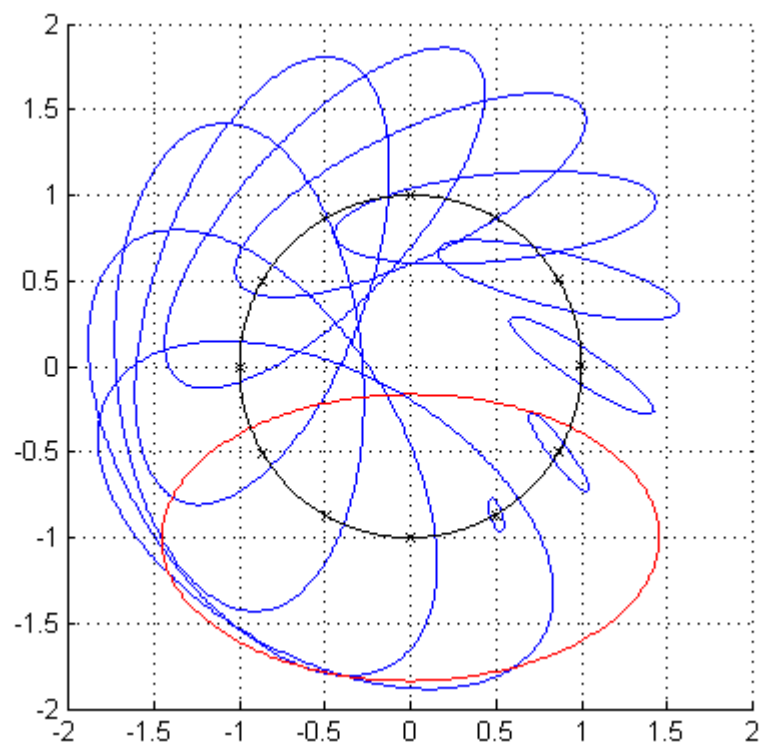
Jak je z obrázků 12 – 17 patrné, časový průběh rychlosti nemá na výslednou neurčitost pozice žádný vliv, zčásti proto, že metoda nedokáže simulovat dynamiku robota. Mírné rozdíly mezi obrázky jsou způsobeny zaokrouhlováním při výpočtech a nepřesným vzorkováním kroků simulace.



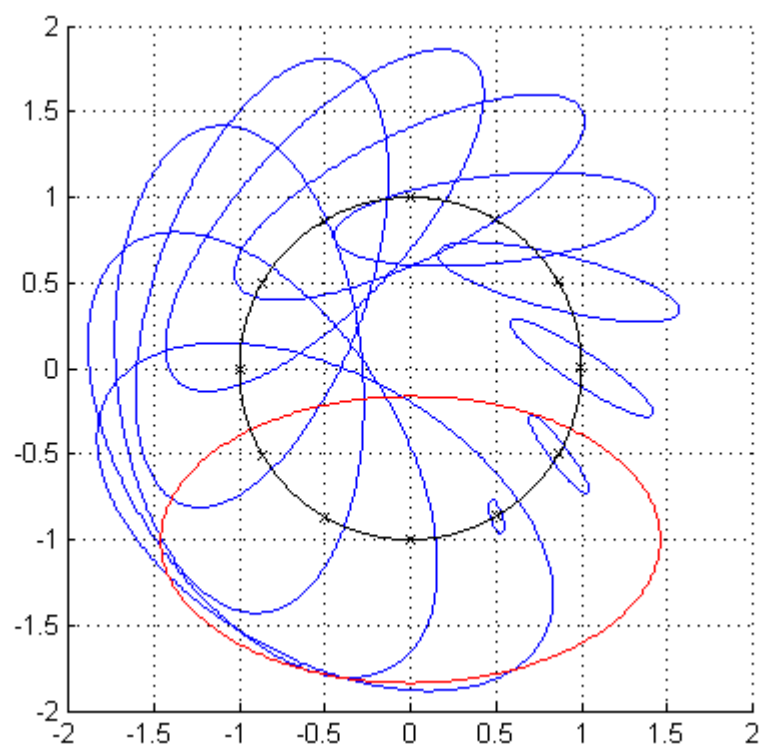
Obr. 12 Pohyb po přímce konstantní rychlostí



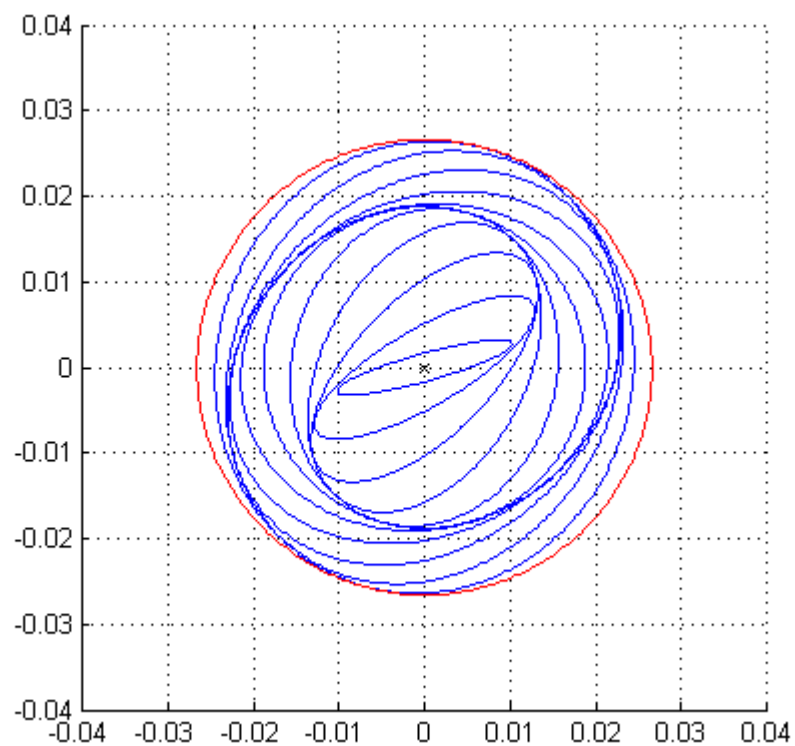
Obr. 13 Pohyb po přímce s konstantním zrychlením



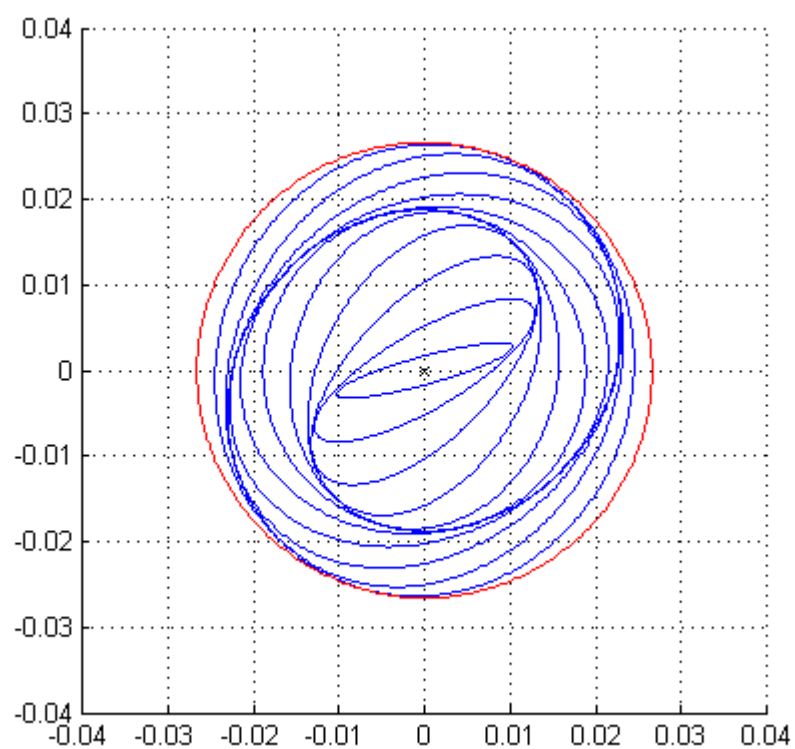
Obr. 14 Pohyb po kružnici konstantní rychlostí



Obr. 15 Pohyb po kružnici s konstantním zrychlením



Obr. 16 Otočení na místě o 360° konstantní rychlostí

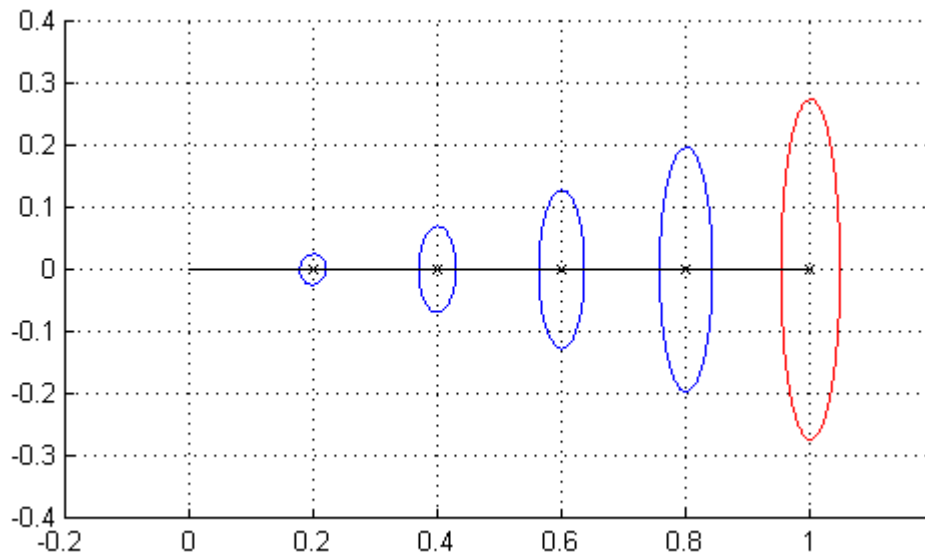


Obr. 17 Otočení na místě o 360° konstantním zrychlením

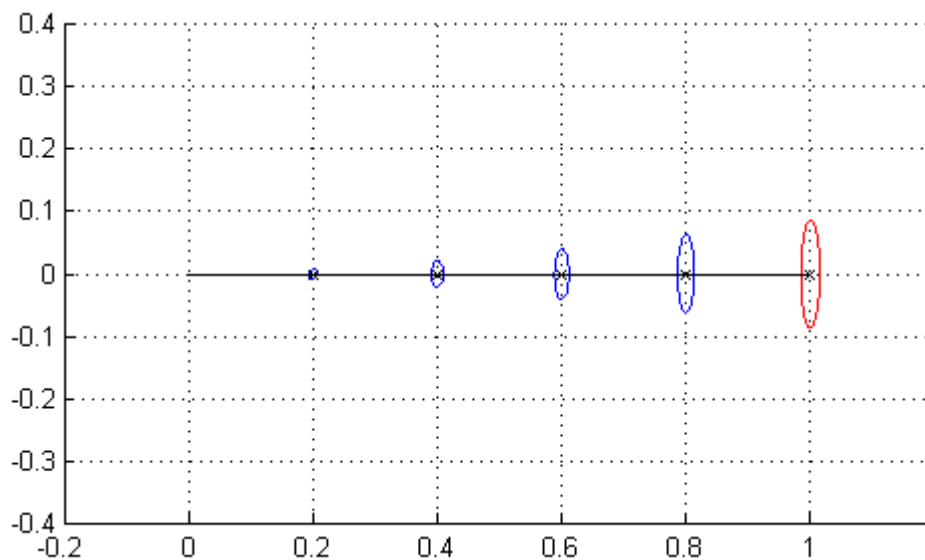
3.3 Vliv parametrů modelu robota

V této podkapitole srovnáme simulace základních pohybů konstantní rychlostí s různými parametry modelu robota. Pokud není uvedeno jinak, simulace jsou prováděny se stejnými parametry, jako v podkapitole 3.1.

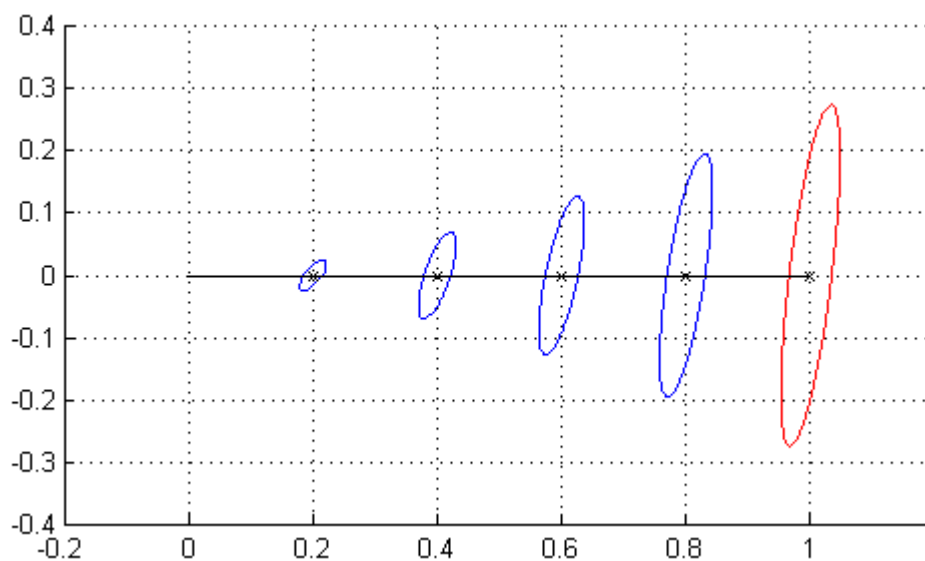
Velikost chybových konstant ovlivňuje velikost výsledných neurčitostí – čím větší chybové konstanty, tím rozsáhlejší neurčitost. Poměr jejich velikostí pak ovlivňuje tvar neurčitosti – výsledné elipsy se jakoby „naklání“.



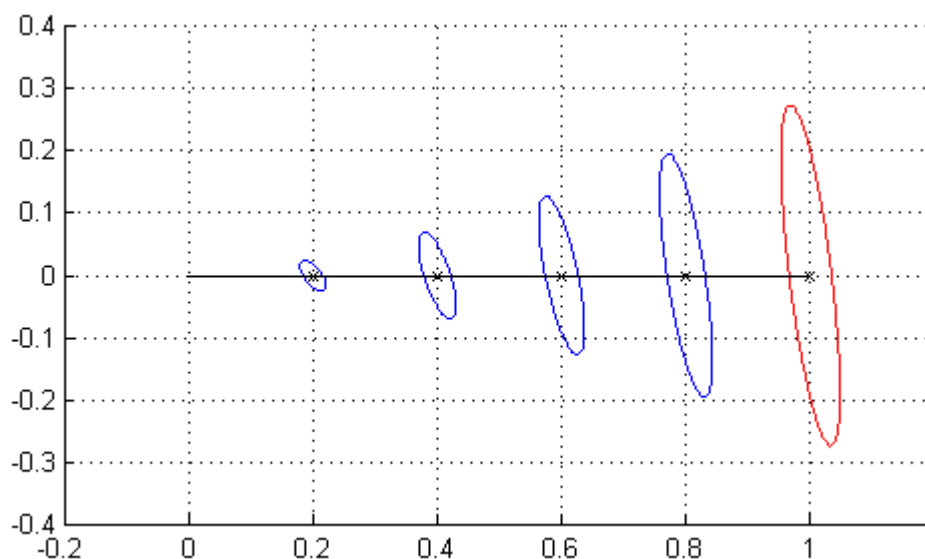
Obr. 18 Pohyb po přímce pro chybové konstanty $k_r, k_l = 5 \cdot 10^{-4}$



Obr. 19 Pohyb po přímce pro chybové konstanty $k_r, k_l = 5 \cdot 10^{-5}$

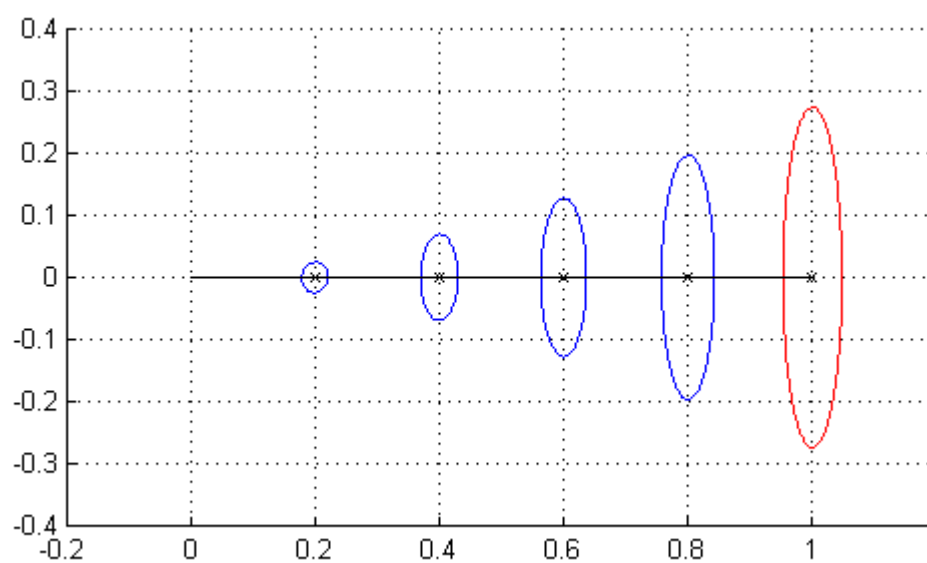


Obr. 20 Pohyb po přímce pro chybové konstanty $k_r = 9 \cdot 10^{-4}$, $k_l = 1 \cdot 10^{-4}$

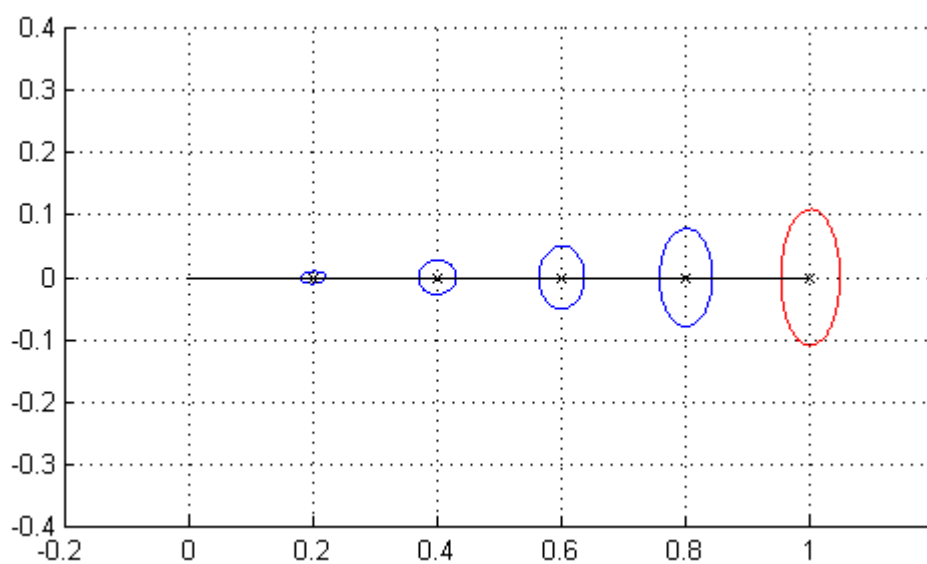


Obr. 21 Pohyb po přímce pro chybové konstanty $k_r = 1 \cdot 10^{-4}$, $k_l = 9 \cdot 10^{-4}$

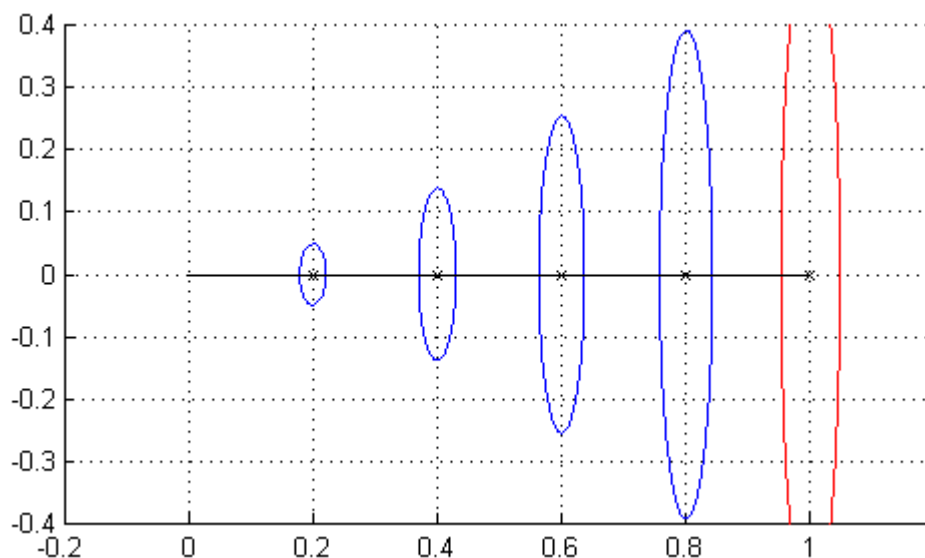
Vzdálenost kol robota vyjadřuje, jak velký vliv má zašumění rychlostí kol vliv na neurčitost jeho natočení, tj. má nepřímý vliv na tvar výsledné neurčitosti ve směru kolmém na směr pohybu.



Obr. 22 Pohyb po přímce pro rozchod kol $b = 0,2$ m



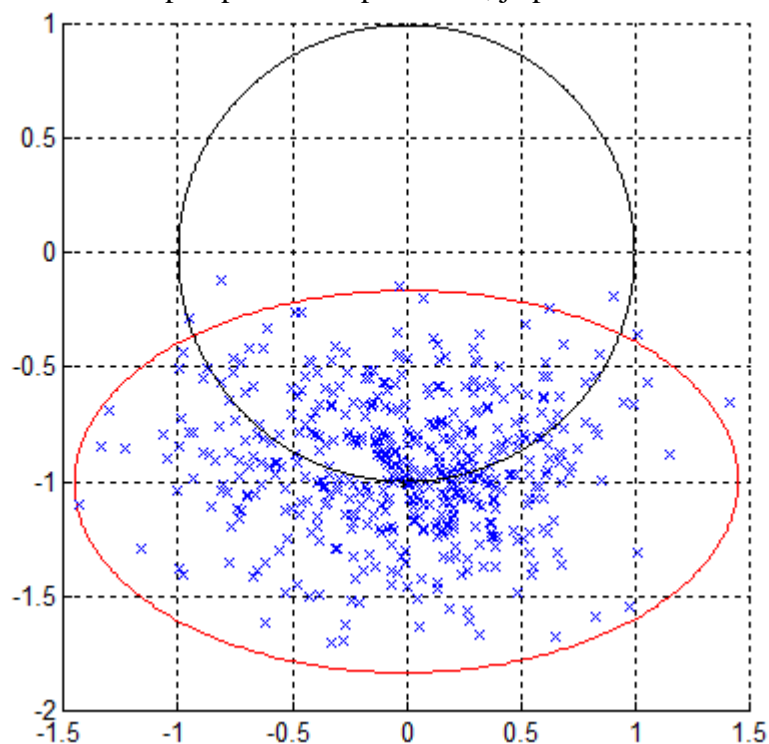
Obr. 23 Pohyb po přímce pro rozchod kol $b = 0,5$ m



Obr. 24 Pohyb po přímce pro rozchod kol $b = 0,1$ m

3.4 Rozložení neurčitosti

Analytické zobrazování neurčitosti pomocí elips nám na rozdíl od pravděpodobnostních map moc neřekne o plošném rozložení výsledné neurčitosti. Jednou z metod, jak si o tomto rozložení udělat alespoň přibližnou představu, je použití částicového filtru.



Obr. 25 Zobrazení rozložení neurčitosti pro jízdu po kružnici

Jak ukazuje obrázek 25, pravděpodobnost, že se robot bude po dokončení nacházet v daném bodě, s rostoucí vzdáleností od cílového bodu klesá – rozložení výsledné pravděpodobnosti kopíruje tvar Gaussovy křivky, což odpovídá normálnímu rozložení náhodných rychlostí kol robota.

4 ANALÝZA METODOU PRAVDĚPODOBNOSTNÍCH MAP

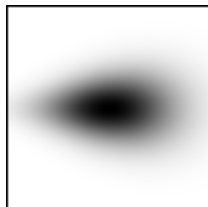
V této kapitole se zaměříme na výpočet neurčitosti pozice robota metodou pravděpodobnostních map a na to, jak jednotlivé faktory ovlivňují výslednou neurčitost. Vzhledem k vysoké časové náročnosti vícekových simulací se omezíme pouze na jednokrokové simulace, což vylučuje možnost zjištění vlivu závislosti rychlosti na čase a složitějších trajektorií.

Mapy zobrazené v této kapitole jsou čtvercové o straně 1 m, s rozlišením 1 cm/pixel a středem v koncovém bodě trajektorie. Barva pixelu značí poměrnou pravděpodobnost, že se robot po vykonání pohybu v něm bude vyskytovat – čím tmavší pixel, tím vyšší pravděpodobnost.

4.1 Rychlostní vyjádření pohybu

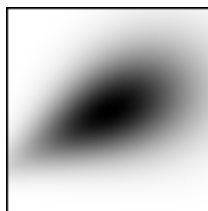
Není-li uvedeno jinak, jsou pro všechny simulace v této podkapitole použity parametry $\alpha_1 \dots \alpha_6 = 5 \cdot 10^{-2}$, $\Delta t = 1$. Výchozí pozice je vždy v bodě $[0, 0, 0]$, tj. v počátku souřadné soustavy s natočením ve směru osy x.

4.1.1 Vliv trajektorie



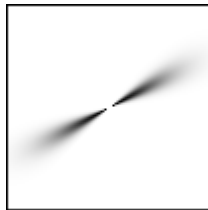
Obr. 26 Pohyb po přímce o délce 1 m

Pro pohyb po přímce o délce 1 m platí rychlosti $V = 1$, $\omega = 0$. Tvar neurčitosti je v tomto případě značně odlišný od výsledku simulace metodou výpočtu kovariančních matic, protože neurčitost pohybu se zde nevztahuje k rychlostem kol, ale k rychlosti samotného robota. Vliv vzdálenosti kol robota je zahrnut v chybových konstantách.



Obr. 27 Pohyb po kružnici o poloměru 1 m o úhlovou vzdálenost 1 rad

Pro pohyb po kružnici o poloměru 1 m o úhlovou vzdálenost 1 rad (tj. 1 m) platí rychlosti $V = 1$, $\omega = 1$. Tvar výsledné neurčitosti je zřetelně stejný jako u pohybu po přímce, její velikost je ale větší, protože kromě chyby rychlosti pohybu se zde projevuje i chyba rychlosti otáčení.

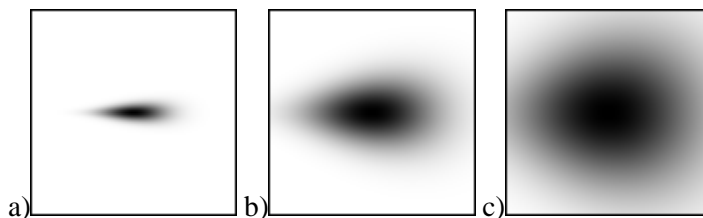


Obr. 28 Otočení o úhel 1 rad

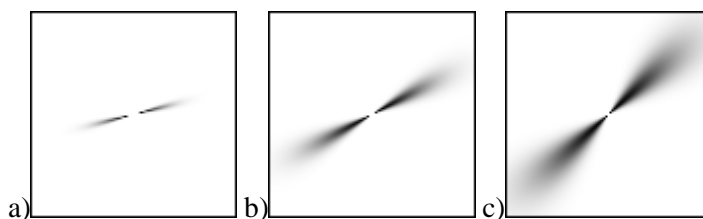
Pro otočení se o úhel 1 rad platí rychlosti $V = 0$, $\omega = 1$. Podle výsledné mapy se robot po dokončení pohybu bude nejpravděpodobněji vyskytovat někde na přímce, která prochází počáteční pozicí pod úhlem 0,5 rad. Za zmínku stojí fakt, že nejpravděpodobnější konečná pozice se nevyskytuje v počátečním bodě, ale dva body, které leží na této přímce ve vzdálenosti asi 2 cm od počátečního bodu. Důvodem je fakt, že se do tohoto bodu může robot dostat více různými způsoby, než do počátečního bodu.

4.1.2 Vliv ujeté dráhy

V této podkapitole se zaměříme na vliv vzdálenosti ujeté konstantní rychlostí za různý čas.



Obr. 29 Pohyb po přímce rychlostí 1 m/s po dobu: a) 0,5 s, b) 1 s, c) 1,5 s

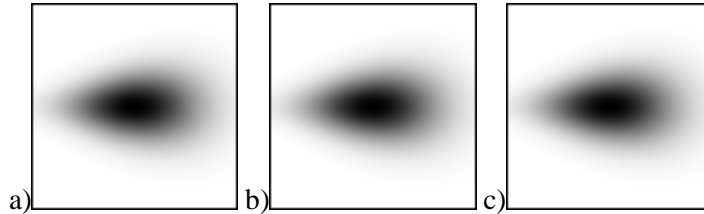


Obr. 30 Otočení na místě rychlostí 1 rad/s po dobu: a) 0,5 s, b) 1 s, c) 1,5 s

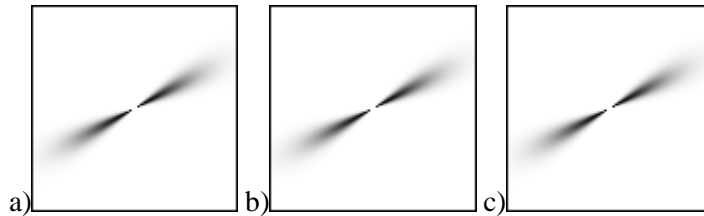
Z obrázků 29 a 30 je patrný exponenciální nárůst velikosti neurčitosti v závislosti na ujeté vzdálenosti ve všech směrech.

4.1.3 Vliv rychlosti

V této podkapitole se zaměříme na vliv velikosti rychlosti, kterou robot dosáhne cílového bodu.



Obr. 31 Pohyb po přímce o délce 1 m rychlostí: a) 1 m/s, b) 10 m/s, c) 0,1 m/s



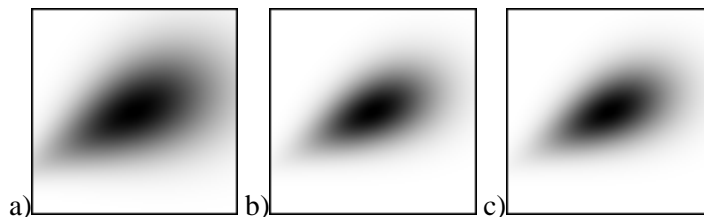
Obr. 32 Otočení na místě o 1 rad rychlostí: a) 1 rad/s, b) 10 rad/s, c) 0,1 rad/s

Z obrázků 31 a 32 je patrné, že rychlost, kterou byl pohyb vykonán, nemá na výslednou neurčitost žádný vliv. Dá se tudíž usoudit, že rozdílný časový průběh rychlosti pohybu neurčitost nijak neovlivní.

4.1.4 Vliv chybových konstant

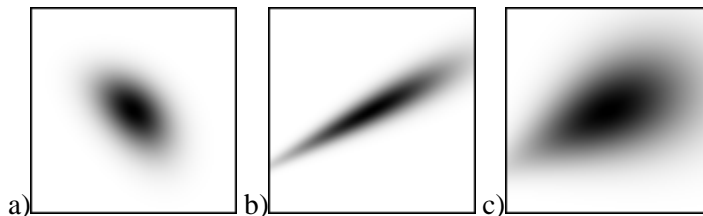
Chybové konstanty určují, jak jednotlivé parametry zadaného pohybu ovlivňují neurčitost skutečného pohybu. Konstanty α_1 , α_2 ovlivňují rychlost pohybu, α_3 , α_4 ovlivňují rychlost změny natočení a α_5 , α_6 ovlivňují drift natočení. Konstanty α_1 , α_3 , α_5 vyjadřují, jak velký vliv má na neurčitost velikost rychlosti pohybu a α_2 , α_4 , α_6 vyjadřují, jak velký vliv má na neurčitost velikost natočení.

Následující simulace byly provedeny pro pohyb $V = 1$, $\omega = 1$ pro různé kombinace chybových konstant zmenšené desetinásobně.



Obr. 33 Pohyb po kružnici: a) bez změny, b) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5 = 5 \cdot 10^{-3}$, c) $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6 = 5 \cdot 10^{-3}$

Z obrázku 33 vyplývá, že změna jedné skupiny konstant způsobí změnu velikosti neurčitosti, nikoliv však jejího tvaru. Je však třeba mít na paměti, že změna velikosti neurčitosti je úměrná jak změně chybových konstant, tak i velikosti



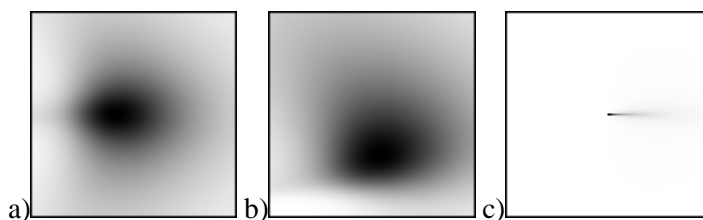
Obr. 34 Pohyb po kružnici: a) $\alpha_1, \alpha_2 = 5 \cdot 10^{-3}$, b) $\alpha_3, \alpha_4 = 5 \cdot 10^{-3}$, c) $\alpha_5, \alpha_6 = 5 \cdot 10^{-3}$

Obrázek 34 ukazuje, jak jednotlivé skupiny chybových konstant ovlivňují výslednou neurčitost – α_1, α_2 ovlivňují její velikost ve směru pohybu a α_3, α_4 ovlivňují její velikost ve směru kolmém na směr pohybu. Konstanty α_5, α_6 na její tvar nemají žádný vliv, protože ovlivňují pouze směr natočení robota po dokončení pohybu, nikoliv jeho souřadnice.

4.2 Odometrické vyjádření pohybu

Parametry simulací v této podkapitole jsou stejné jako v té předchozí, tj. $\alpha_1 \dots \alpha_4 = 5 \cdot 10^{-2}$, $\Delta t = 1$, výchozí pozice $[0, 0, 0]$. Provedené simulace jsou rovněž totožné. Pro výpočet konečné pozice potřebné pro odometrické vyjádření pohybu použijeme algoritmus pro generování náhodného pohybu v rychlostním vyjádření za použití nulových chybových konstant.

4.2.1 Vliv trajektorie

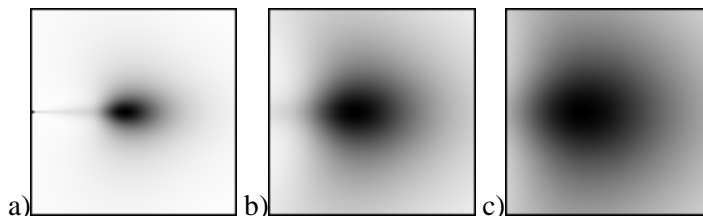


Obr. 35 a) Pohyb po přímce o délce 1 m, b) po kružnici o poloměru 1 m o úhlovou vzdálenost 1 rad

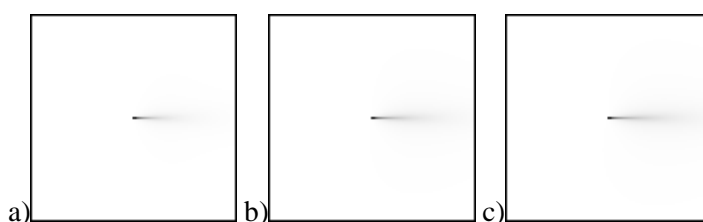
Velikost neurčitosti pro pohyb po přímce a po kružnici je zde mnohem větší než v případě rychlostního popisu, pro otočení na místě naopak mnohem menší. Z toho vyplývá, že při odometrickém popisu pohybu ovlivňuje přímý pohyb neurčitost v mnohem vyšší míře než změna natočení.

Za zmínku stojí fakt, že při pohybu je bod s nejvyšší poměrnou pravděpodobností mimo střed mapy, tj. bod, do kterého by se robot dostal nezašuměným pohybem.

4.2.2 Vliv ujeté dráhy



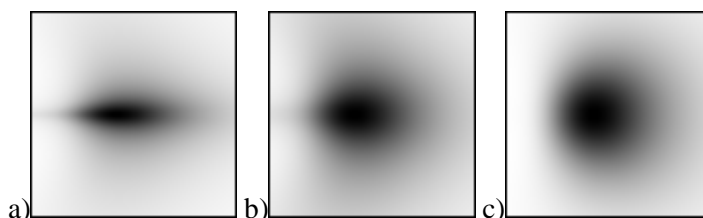
Obr. 36 Pohyb po přímce rychlostí 1 m/s po dobu: a)0,5 s, b)1 s, c)1,5 s



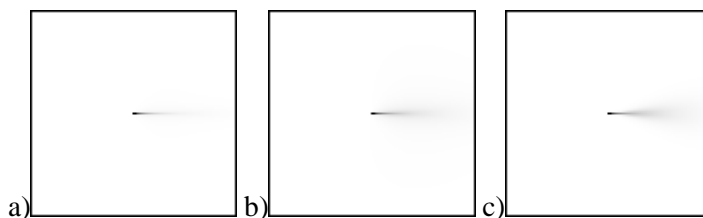
Obr. 37 Otočení na místě rychlostí 1 rad/s po dobu: a)0,5 s, b)1 s, c)1,5 s

Stejně jako v případě rychlostního popisu, i zde je patrný nárůst velikosti neurčitosti v závislosti na ujeté vzdálenosti.

4.2.3 Vliv rychlosti



Obr. 38 Pohyb po přímce o délce 1 m rychlostí: a)1 m/s, b)10 m/s, c)0,1 m/s



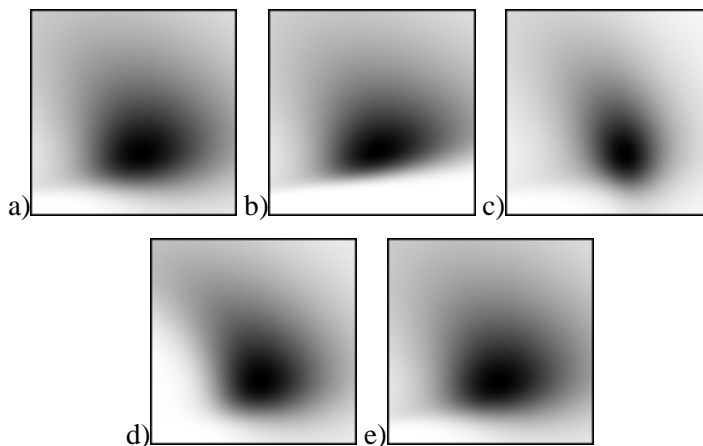
Obr. 39 Otočení na místě o 1 rad rychlostí: a)1 rad/s, b)10 rad/s, c)0,1 rad/s

Rychlost pohybu zde má na rozdíl od rychlostního popisu zřetelný vliv na výslednou neurčitost. V případě přímého pohybu má neurčitost s nižší rychlostí podlouhlý tvar,

který se se vzrůstající rychlostí postupně zakulacuje. V případě otočení se na místě výsledná neurčitost se se vzrůstající rychlosti rozšiřuje.

4.2.4 Vliv chybových konstant

Odometrický popis pohybu používá pouze čtyři chybové konstanty, které určují, jak se vzájemně ovlivňují jednotlivé etapy pohybu dle odometrického popisu (popsán v 2.2.2). Konstanty α_1 , α_2 ovlivňují neurčitost počátečního a koncového natočení a α_3 , α_4 ovlivňují neurčitost přímé jízdy. Konstanty α_1 , α_4 vyjadřují, jaký vliv mají na neurčitost počáteční a koncové natočení a α_2 , α_3 vyjadřují, jaký vliv má přímá jízda.



Obr. 40 Pohyb po kružnici: a) bez změny, b) $\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-3}$, c) $\alpha_2 = 5 \cdot 10^{-3}$, d) $\alpha_3 = 5 \cdot 10^{-3}$, e) $\alpha_4 = 5 \cdot 10^{-3}$

Obrázek znázorňuje, jaký vliv mají na výslednou neurčitost chybové konstanty. Konstanta α_1 ovlivňuje velikost neurčitosti ve směru kolmém na směr pohybu, α_3 ovlivňuje velikost neurčitosti ve směru pohybu a α_2 a α_4 ovlivňují rozptyl neurčitosti.

5 ZÁVĚR

Metoda výpočtu kovariančních matic je jednoduchá a nenáročná, čili vhodná pro rychlé výpočty. Výsledné neurčitosti, dosažené touto metodou, mají vždy tvar elipsy, což na jednu stranu nemusí vždy odpovídat skutečnosti, ale na stranu druhou zjednodušuje zjišťování chybových konstant pro model skutečného robota.

Metoda sestavování pravděpodobnostních map je značně náročná a neefektivní pro realizaci více krokových simulací. Algoritmus pro výpočet pravděpodobnosti za použití rychlostního modelu pohybu obsahuje několik možných chybových stavů, které je nutné ošetřit. Odometrický model pohybu je navržen spíše pro realizaci ve skutečných robotech, protože vyžaduje měření počáteční a konečné pozice, a tudíž je pro simulaci pohybu robota nevhodný. Výsledné neurčitosti ve formě pravděpodobnostních map jsou podrobnější, než v případě metody výpočtu kovariančních matic, což ale způsobuje větší složitost zjišťování chybových konstant pro model robota než v případě metody výpočtu kovariančních matic.

Neurčitost pozice kolového robota je ovlivněna kromě velikosti chybových konstant také vzdáleností kol robota, trajektorií a délkou pohybu. Změna rychlosti pohybu má na neurčitost vliv pouze při použití odometrického popisu pohybu.

Literatura

- [1] Siegwart R., Nourbakhsh I. "Introduction to Autonomous Mobile Robots", MIT Press, 2004
- [2] Thrun S., Burgard W., Fox D.: "Probabilistic Robotics", MIT Press, 2005
- [3] ROZMAN, J. Navigace mobilních robotů.. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií, 2011
- [4] R. H. Gersten, „On the Interpretation of Error Contours,“ TR-0080(5901-03)-2, The Aerospace Corporation (30 Sep 1980)

Seznam příloh

Příloha 1. CD/DVD